大きなボールと小さなボール

— 連立一次方程式を 10 歳の子供に説明できるだろうか —

山内 斉

原文 2008-2-3(Sun), 日本語版 2008-5-18(Sun)

概 要

ある時，私の友人の子供が私立の学校の試験を受けたという話がありました．ドイツでは私立の学校というのは珍しい方のようですが，Berlin や München では時々話を聞きます．試験は 10 歳位の子供のもので，ある種の連立一次方程式でした．友人と話をしていた時には答えはなんとか出すことができましたが，どうしてこれで解けるのかを説明できませんでした．その後，連立方程式はどんな考えがあれば理解できるのだろうと思ってこの文書を書いてみました．友人にはわかったと言ってもらえたのに元気づけられてフォーマットを整えてみました．

このドキュメントは元々私の友人に説明するために英文で書かれました．今回は日本語に翻訳してみます．

1 問題

> 大きなボールと小さなボールがいくつかあります．小さなボールが 5 つと大きなボールが 3 つの時の値段は 5.1 ユーロでした．大きなボールが 5 つと小さなボールが 3 つの時には，6.26 ユーロです．小さなボールと大きなボールの値段はそれぞれいくらでしょうか．図 1 を見て下さい．(説明文は英語ですが，問題文と同じ意味です．)

ここで大きなボール (Big ball) の値段を b ユーロ，小さなボール (Small ball) の値段を s ユーロとします．ここで，この文字 (b や s) をどう選んだかは些細なことなのですが，気になる方もいるかもしれません．大きなボールの値段を a ユーロ，小さなボールの値段を b ユーロ，というのでもかまわないのですが，私の個人的な趣味で b と s にしました．というのは，単に大きなボール (big ball) を b として，小さなボール (small ball) を s とするのが私には覚えやすかったからです．区別がつくのであれば，この文字は何でもかまいません．

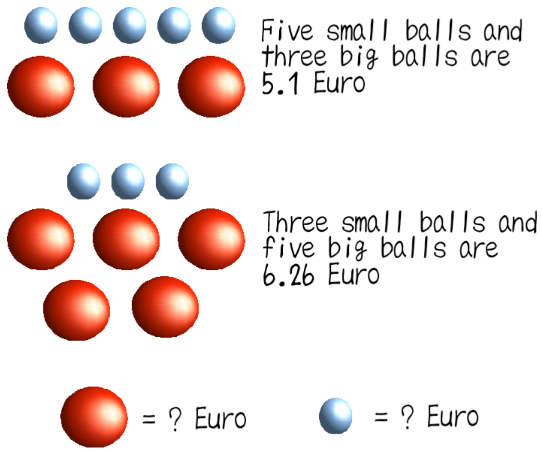

図 1: 大きなボールと小さなボール問題

問題文から既に最初の方程式が得られます．式というだけで怖がる人もいるようですが，小さなボールが 5 つ ($s \times 5$) と大きなボールが 3 つ ($b \times 3$) を合わせて (+) 5.1 ユーロなので，

$$5s + 3b = 5.1 \qquad (1)$$

です．かけ算は計算の順序を交換しても良いのと ($5 \times 3 = 3 \times 5$)，かけ算の記号 ($\times$) を省略する習慣に従って ($s \times 5 = 5s$) としましたが，もちろん $s \times 5 + b \times 3 = 5.1$ と同じです．この式は,「5 つの小さなボール ($5 \times s$) たす 3 つの大きなボール ($3 \times b$) は 5.1 ユーロに等しい」と読みます．続きの問題文も同様に書いてみます．

$$3s + 5b = 6.26 \qquad (2)$$

これは「3 つの小さなボール $(3 \times s)$ たす 5 つの大きなボール $(5 \times b)$ は 6.26 ユーロに等しい」と読みます．

「3 つの小さなボール $(3 \times s)$ たす 5 つの大きなボール $(5 \times b)$ は 6.26 ユーロに等しい」が $3s + 5b = 6.26$ のように短かくなってしまうのは不思議かもしれませんが，良く使う言葉を短かくするのはよくみかけることでしょう．パーソナルコンピュータを「パソコン」と言ったり，携帯電話を「携帯」と言うようなもので，慣れれば間違うこともなく，短い分便利です．数学者や計算機学者はおおむね面倒くさがりやで，どうやったら仕事をさぼれるかという方法を探す仕事をしています．これはおかしなことかもしれませんが，実際に計算機学者はどうやったら面倒な仕事をコンピュータに自動でまかせられるかということを考えています．そのためには仕事についてもっと知らなくてはいけません．

かけ算の記号 $(\times)$ を省略することや，「小さなボール一個の値段」を s と書く，などということはおおむね面倒なことをできるだけしないというためにあります．しかし，ここで重要なことは，このような省略では間違いは起きないということです．この省略の約束では，失なわれる情報はないのです．もし，足し算まで省略してしまえば，省略されたのは足し算なのかかけ算なのかわかりません．かけ算だけが省略できるのはこのような理由によります．

2 この問題の難しいのはどこ?

もしこの問題が簡単なものだったら，この文書を書くこともなかったでしょう．でもこの問題は，問題を読んだだけですぐに答えがわかるというものではないと思います．この問題が難しいのは，わからないことが二つあること (大きなボールの値段と小さなボールの値段) です．もし，大きなボールの値段がわかっていたら，小さなボールの値段は簡単にわかります．

たとえば，小さなボールしかない場合を考えてみましょう．10 個の小さなボールの値段が 50 ユーロだったら，小さなボールの値段は $50/10 = 5$ ユーロと簡単にわかります．

問題が難しいのは二つのわからないことが同時に起こっているからです．この問題そのものをどうやって解くかということの前に，いろんな難しい問題に適応できるすごい解法をお教えしましょう．それは，ローマ帝国が利用した方法で，「分割統治法 (Divide and Conquer)」と呼ばれる考えです．

ローマ帝国が強い敵と戦う時，彼らはまず敵を仲違いさせ，半分に分けました．そして一つづつ征服したのです．もし，半分でもまだ手強い時には，その半分をまた半分にしたのです．相手が十分に勝てるだけ小さくなったら，戦って征服したのです．

この考えはいろんなことに使えます．大きなピザを食べる時，一口で食べられなくても細かく切って一つづつ食べれば食べることができます．あたりまえと思うかもしれませんが，でも，あたりまえの考えというのもよく考えてみるとなかなか奥が深いものが多々あります．

これは難しい問題を解く時にも使えます．二つの知らないことがあるというのは手強い問題です．しかし，もし一つの知らないことをなくすことができたら? そうしたら残った一つの敵を征服することは簡単でしょう．

それではどうしたら一つの敵 (わからないもの) を消すことができるでしょうか．これにはすばらしい数学の道具が使えます．それは**ユークリッドの公理 (Euclid's axioms)** というものです．これは一般的で強力，そして簡単なので，やっぱり多くの人があたりまえだと思っています．こんなものに「公理」というような大層な名前がついていることをいぶかしむ人もいるかと思います．確かにそうだと思います．でも，こんなあたりまえなことでもちゃんと使うのはなかなか難しいものです．

3 ユークリッドの公理

ユークリッドの公理は実はいくつもあります．ここでは一つだけを使いましょう．ここでこの公理を使うのは，我々の方程式から一つの知らないものを除くためということを心にとめておいて下さい．

- ユークリッドの「原論」の公理: 等しいものに等しいものを加えてもそれらはまた等しい．図 2 を参照．

こんなことでもちゃんと書くと難しく感じます．これは，もし私が 10 ユーロ持っていて，あな

たが 10 ユーロ持っていた時 (両方が 10 ユーロの「等しいもの」を持っている)，私とあなたの両方が 5 ユーロずつ誰かからもらった (5 ユーロづつという「等しいものを加えた」) ら，私達は両方とも等しい金額を持っている (15 ユーロ) ということです．簡単なことでしょう?

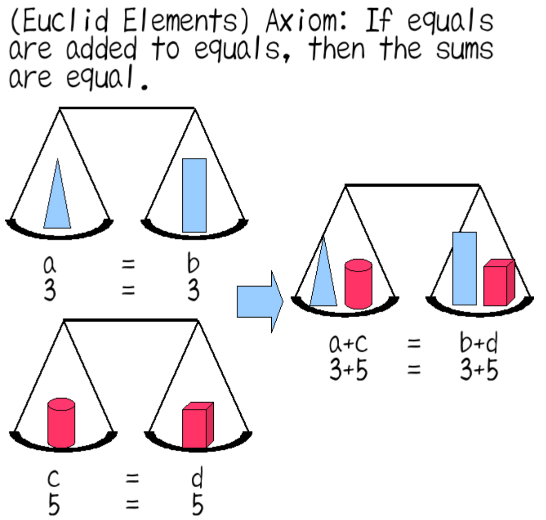

図 2: ユークリッドの原論の公理の一つ

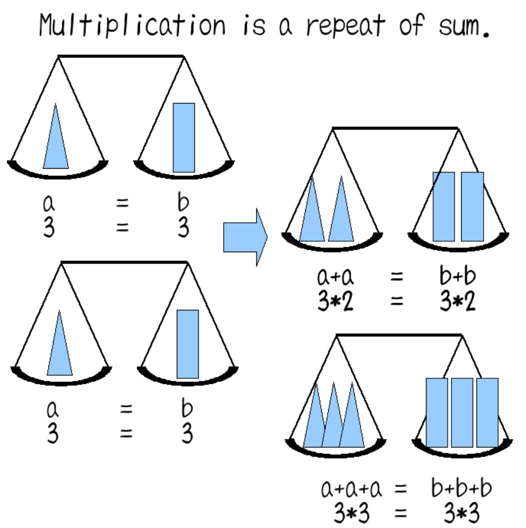

図 3: かけ算に公理を応用した例．かけ算は足し算の繰り返しなので公理はかけ算にも使える．

かけ算は足し算の繰り返しです．たとえば，3 回 2 を足した場合，$2+2+2=3\times 2$ です．したがって，この公理はかけ算にも使えます．図 3 を参照して下さい．

もし，二人の子供が両方とも一回 2 リットルのミルクをお店から家まで運べる場合 (等しいもの)，そして両方が 3 回 (等しいかけ算) 運んだ場合，彼らは両方とも等しい量を家に運んだのです ($2\times 3=6$ リットルのミルク)．

ここではユークリッドの公理という道具について説明しました，次はこの道具を使って我々の方程式から知らないものを一つ除いてみましょう．

4　道具を使ってみる

問題に挑戦する前に,「方程式」というものは何かを考えてみましょう．方程式という言葉はおそらくもともと面積に関係する問題を扱ったものだと思います．なぜなら方という文字に四角の意味があるからです．平方という言葉にもそれがあります．方程式は英語では equation，等しいものに関係があります．方程式は二つの関係を等式で結んだもので，その関係は二つが等しいということを示しています．ですから，英語の方がわかりやすいかもしれません．我々の方程式 (式 1) でも，左側 (左辺 $5s+3b$) と右側 (右辺 5.1) が等しい (=) ことを示しています．ここでのキーワードは「等しい」です．ユークリッドの公理は何を言っていたでしょうか?「等しいもの」の話でした．そしてユークリッドの公理は等しいものに等しいものを加えるという「操作」の話をしていたのです．ここで我々は，(1) 等しいもの，(2) 等しいものを操作する道具，を手に入れました．だからユークリッドの公理の話がでてきたのです．

この道具を使って簡単な練習をしてみましょう．方程式 (式 1) の両辺を二倍してみましょう．これは等しいものにそのものの等しいものを足したことと同じです．すると次の方程式が得られます．

$$
\begin{aligned}
2\times(5s+3b) &= 2\times 5.1\\
10s+6b &= 10.2
\end{aligned}
$$

三倍も同じです．

$$
\begin{aligned}
3\times(5s+3b) &= 3\times 5.1\\
15s+9b &= 15.3 \qquad (3)
\end{aligned}
$$

ここまでは良いでしょうか．これが納得いかない場合には良く考えてみて下さい．等しいものがあって，両方に同じ操作をしてもやっぱり等しいままです．これは単純と言えば単純なのですが，難しいことでもあります．実際の数を入れてみれば簡単かもしれませんが，ここでは

数の話をしていません．一段抽象的な思考が必要なのです．しかし，ここでは結局このユークリッドの公理の一つという道具だけしか使わないのでがんばってみて下さい．

もう一つの方程式 (式 2) にも公理を使ってみましょう．方程式は等しいものの関係ですから，公理が使えます．ある理由から両辺を 5 倍してみましょう．なぜ 5 倍するかはこの後ででてきます．

$$\begin{aligned} 5 \times (3s + 5b) &= 5 \times 6.26 \\ 15s + 25b &= 31.3 \qquad (4) \end{aligned}$$

さて，それぞれの方程式 (式 3 と式 4) を比較してみましょう．

$$\begin{aligned} \underline{15s} + 9b &= 15.3 \\ \underline{15s} + 25b &= 31.3 \end{aligned}$$

下線を引いた部分が同じことに気がつきましたか．実はこれこそ求めるものでした．なぜなら，ここでもまた公理が使えるからです．公理は引き算でも使えます— もし等しいものから等しいものを除いた場合，残りは等しい．[1]

さて，ここからはちょっと手がこんでいます．式 (3) の左辺と右辺は等しいものです．そして式 (4) の左辺と右辺も等しいものです．ですから，公理をここでも使うことができます．もし両辺が等しい場合 — みかけが違っていても — 両辺から等しいものを引くことができます．そして，式 (3) の両辺は等しいものです．

これも難しい部分ですが，できるでしょうか．やっていることはいつも同じ，ユークリッドの公理を使う，です．しかし，複雑に見えること，方程式から方程式を引くこと，をやってみます．

式 (4) - 式 (3):

$$\begin{aligned} \text{(4) 左辺} - \text{(3) 左辺} &= \text{(4) 右辺} - \text{(3) 右辺} \\ 15s + 25b - (15s + 9b) &= 31.3 - 15.3 \\ \underbrace{15s - 15s}_{\text{消える!}} + 25b - 9b &= 16 \end{aligned}$$

できました! 一つのわからないものが消えました．こうなれば残りは簡単です．

$$\begin{aligned} 16b &= 16 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

b，つまり大きなボールの値段は 1 ユーロです．

一つの答えがわかれば，この答えを使ってもう一つがわかります．式 (1) より，

$$\begin{aligned} 5s + \underline{3b} &= 5.1 \quad (\text{b} = 1, 3b = 3) \\ 5s + 3 &= 5.1 \\ 5s + 3 - 3 &= 5.1 - 3 \quad \text{(再び公理利用)} \\ 5s &= 2.1 \\ s &= 0.42 \end{aligned}$$

小さなボールの値段は 42 セント (100 セントで 1 ユーロです).

公理を何度も使って未知なものを除いていきました．でもここでどうやってかけ算の数を選んだのか疑問に思うかもしれません．ここでは式 (1) を 3 倍し，式 (2) を 5 倍しました．これは最小公倍数というものになっていますが，この話はそれだけで一つのテーマになるのでまたの機会にしましょう．

5 まとめ

ここでは 2 つの考えを使って問題を解きました．

- 分割統治法: 難しい問題を複数の簡単な問題に分割し，それぞれの簡単な問題を解くことで難しい問題を解く方法．ここでは 2 つの未知数のうち一つを最初に解き，そして残りを解いた．一気に二つを解く方法もあるが今回は使わなかった．
- ユークリッド原論の公理: もし等しいものに等しいものを加えたら，その結果も等しいものになる．

6 そしてさらに...

- この問題を一般化する: もし中間の大きさのボールがあったらどうなるでしょうか．そのような問題も解けるでしょうか．

[1] ユークリッドの時代 (紀元前 300 年頃) には，これは明かではありませんでした．なぜなら負の数の考えがまだ確立していなかったからです．そのためユークリッドは引き算に対しては話をしていませんでした．でも我々は引き算は負の数を足すことに等しいことを知っていますので公理が使えます．

- 線型システムとマトリックス (行列): はい，ある条件の元ではそのような問題，もっと沢山の未知数，でも解くことができます．どんな時に問題が解けるのか解けないのか，どうやって解くことができるのか，などがこの分野のトピックです．
- 線型計画法: もし，方程式ではなくて不等式だったらどうなるでしょうか．たとえば，投資などの場合，税金は投資額がここまではこうである，などの不等式の制約があります．どのような条件なら，利子が最大で税金を少なくすることができるのか? などがこの分野になります．

この文書をお楽しみ頂けたら幸いです．

山内 斉
2008-2-3(Sun), Berlin (原文)
2008-5-18(Sun), Berlin (日本語訳)